

Mémoire De Master
Intitulé : Groupes et anneaux flous

préparé par : Khadidja DJEDDI et Nour El Houda CHAMI

Encadré par : Prof. dr. L. ZEDAM

3 juillet 2018

Table des matières

Remerciement	3
Introduction	4
1 Groupes et anneaux classiques (ordinaires)	6
1.1 Loi de composition interne	6
1.1.1 Définitions et exemples	6
1.1.2 Propriétés des opération internes	7
1.2 Groupe classique	8
1.2.1 Définitions et exemples	8
1.2.2 Propriétés des groupes	9
1.2.3 Morphisme de groupes	11
1.3 Anneau classique	12
1.3.1 Définitions et exemples	12
1.3.2 Propriétés des anneaux	14
1.3.3 Morphisme d'anneaux	17
2 Ensemble flou	18
2.1 Définitions et exemples	18
2.2 Caractéristiques d'un ensemble flou	19
2.3 Opérations sur les ensembles flous	21
2.4 Propriétés des ensembles flous	22
2.5 Norme et conorme triangulaires	25
2.5.1 Définitions et exemples	25
2.5.2 Négation et dualité entre opérateurs	26

2.5.3	Propriétés des t-normes et t-conormes	26
2.5.4	Extensions des opérations sur les ensembles flous	28
3	Groupes et anneaux flous	29
3.1	Groupe flou (vision <i>I</i>)	29
3.1.1	Définitions et exemples	29
3.1.2	Propriétés des groupes flous	30
3.1.3	Morphismes des groupes flous	33
3.2	Groupe flou (vision <i>II</i>)	34
3.2.1	Définitions et exemples	34
3.2.2	Propriétés des groupes flous	34
3.2.3	Morphismes des groupes flous	36
3.3	Anneaux flous (vision <i>I</i>)	36
3.3.1	Définitions et exemples	36
3.3.2	Propriétés des anneaux flous	37
3.3.3	Morphismes des anneaux flous	40
3.4	Anneaux flous (vision <i>II</i>)	41
3.4.1	Définitions et exemples	41
3.4.2	Propriétés des anneaux flous	42
	Conclusion	43
	Bibliographie	44

Remerciement

Nos remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces années d'étude.

nous exprimons nos profondes gratitudes à nos parents pour leurs encouragements, leurs soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à nos Encadreur Prof. **Lemnaouar ZEDAM** pour avoir d'abord proposé ce sujet, pour suivi contuellement tout le long du parcours et qui n'a pas cessée de nos donner des conseils et remarques.

nous remercions les membres de jury (prof **A. AMROUNE** et **S. MILLES**) pour l'honneur qu'ils nous faire en participant au jugement de ce travail.

Les mêmes expressions de reconnaissance vont également à tous les enseignants du Département Mathématiques.

nous tenons à remercier vivement toutes les personnes qui nous ont aidé d'élaborer et réaliser ce mémoire. Ainsi qu'à tous ceux qui nous ont aidé de près où de lois à accomplir ce travail.

Enfin nous tenons à exprimer nos reconnaissance à toute nos amies et collègues pour le soutien.

Introduction

La notion de groupe et anneau a été introduit la première fois au début du dix-neuvième siècle. La terminologie "groupe" est mise en évidence pour la première fois par Evariste Galois, et accompagnée de la présence de la terminologie "anneau" .

En 1965, L. A. Zadeh (Professeur à l'université de Californie à Berkeley), a été introduit la notion de sous-ensembles flou (fuzzy set en anglais), généralisant la notion d'ensemble classique, cette notion prendre en compte un ensemble de degrés d'appartenance en plus de 0 (\notin : non-appartenance) et 1 (\in : appartenance). Les imprécisions et les incertitudes peuvent ainsi être modélisées, et les raisonnements acquièrent une flexibilité que ne permet pas la logique classique : la logique flous était née.

En 1971, Rosenfeld [12] utilisé la notion d'un ensemble flou pour introduit la notion d'un groupe flou. Cependant, Liu [10] en 1982 a été introduit la notion d'un anneau flou. ces deux notions (groupe et anneau flous) ont été étudiés et abordés par plusieurs chercheurs, à titre d'exemple, Abdul [1], Akgul [2], Alam [3], Liu [10], Ren [11], Roman [14], Yuan [16], ... etc.

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés de l'étude des groupes et anneaux flous. Plus précisément, nous présentons les deux versions floues de ces concepts. la première version considère l'ensemble référentiel (l'univers) comme un groupe (resp. anneau) classique, et le groupe (resp. anneau) flou est défini comme un ensemble flou de ce univers. Dans la deuxième version, nous considérons le groupe (resp. l'anneau) flou comme un ensemble classique non vide muni d'une opération (resp. 2 opérations) internes floue vérifient certains axiomes.

Le mémoire est subdivisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre rappellent les définitions et quelques propriétés des groupes et d'anneaux classiques.

Dans le deuxième chapitre nous donnons les concepts fondamentales de la théorie des ensembles flous ; sa position par rapport à la théorie des ensembles classiques, les propriétés fon-

damentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques.

Dans le troisième chapitre nous présentons la notion des groupes et anneaux flous, et un nombre de ses propriétés fondamentales avec plusieurs exemples explicatifs .

Chapitre 1

Groupes et anneaux classiques (ordinaires)

En mathématiques, plus particulièrement en algèbre, une structure algébrique est formée d'un ensemble combiné à une ou plusieurs lois de composition, éventuellement complétées par un ordre ou une topologie, le tout satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

On peut dire aujourd'hui que l'algèbre est la théorie des structures algébriques. En termes plus simples, une structure algébrique est un ensemble muni de certaines opérations (addition, multiplication, intersection, etc.) sans tenir compte de la nature des éléments de cet ensemble. Les structures que nous étudierons dans ce cours, ne comportent que des lois de composition. En particulier, les structures de base ne comportent que des lois de composition internes. On peut notamment citer les structures de groupe et d'anneau. Pour plus de détails [4],[8],[13], [15].

1.1 Loi de composition interne

Soient E et F des ensembles, on note $E \times F$ et on appelle **Le produit cartésien** de E et F l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à E et le seconde à F :

$$E \times F = \{(x, y) : (x \in E) \wedge (y \in F)\}.$$

.

1.1.1 Définitions et exemples

Soit E un ensemble non vide

Définition 1.1 Une loi de composition interne (ou bien une opération interne) sur E est une application $*$ $E \times E \longrightarrow E$, un ensemble E muni d'une loi interne $*$ est noté $(E, *)$.

Définition 1.2 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $(*)$, on dit qu'une partie P de E est stable pour $(*)$ si

$$\forall (x, y) \in P, \text{ telque : } x * y \in P$$

.

Exemples 1.1 Le loi de composition internes les plus courantes sont :

(i) " + " dans N, N^*, Z, Q, R, C ;

(ii) " - " dans Z, Q, R, C ;

(iii) " \times " dans N, N^*, Z, Q, R, C ;

(iv) " / " dans Q^*, R^*, C^* .

1.1.2 Propriétés des opération internes

Soit E un ensemble muni d'une opération interne $*$ on dit que $*$ est :

(i) **associative** si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 : x * (y * z) = (x * y) * z;$$

(ii) **élément neutre** s'il existe e un élément neutre de G si :

$$\forall x \in E : x * e = e * x = x;$$

(iii) **élément symétrique ou l'inverse** soit x' appartient G si :

$$x * x' = x' * x = e;$$

(iv) **commutative** si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : (x * y = y * x).$$

Remarque 1.1 (i) l'élément neutre, s'il existe il est unique ;

(ii) Un élément $x \in G$ ne possède un seul inverse.

Exemples 1.2 (i) Soit l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} muni d'une opération interne "+", On dit que "+" est : associative, commutative, admet un élément neutre "0", et n'admet pas un élément symétrique,

(ii) Soit l'ensemble \mathbb{Q} muni d'une opération interne "-", On dit que "-" est : associative, commutative, admet un élément neutre "0", et possède un élément symétrique ($1/x$),

(iii) Soit l'ensemble \mathbb{R} muni d'une opération interne " \times ", On dit que " \times " est : associative, commutative, admet un élément neutre 1, et possède un élément symétrique ($-x$).

1.2 Groupe classique

Dans cette section, nous commencerons par la structure de groupe qui est une structure algébrique relativement simple parce qu'elle ne contient qu'une seule opération et qu'elle est utilisée dans beaucoup d'autres structures algébriques.

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.3 (Groupe) C'est un ensemble G non vide muni d'une loi de composition interne $(.)$, la loi est associative admettant un élément neutre, et pour chaque élément de l'ensemble G possède un élément symétrique.

Définition 1.4 Soit $(G, .)$ un groupe. Si la loi $(.)$ est **Commutative**, On dit que un groupe commutative ou abélien.

Exemples 1.3 (i) l'ensemble des entiers $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$ avec l'addition + est un groupe commutatif. L'élément neutre est 0. (De même $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe).

(ii) Les réels non nuls $\mathbb{R}/\{0\}$ avec la multiplication \times est un groupe commutatif. L'élément neutre est 1.

(iii) $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas groupe.

Remarque 1.2 Si la loi de composition interne $(.)$ est associative dans ce cas on appelle $(G, .)$ est **semi-groupe**. Si la loi de composition interne $(.)$ est associative et possède un élément neutre, on dit que $(G, .)$ est un **monoïde**.

1.2.2 Propriétés des groupes

Définition 1.5 Soit G est un p -groupe, avec p premier, si G est de cardinal une puissance de p .

Définition 1.6 (sous-groupe) Soit $(G, .)$ est un groupe, et soit H une partie non vide de G est un **sous-groupe** de G si

(i) $e \in H$

(ii) soit le couple (x, y) appartient $H \times H$ si $x.y$ appartient H ,

(iii) soit x appartient H si x^{-1} appartient H

Exemples 1.4 (i) l'élément neutre e est le plus petit sous-groupe de G ;

(ii) L'ensemble G est sous-groupe de G .

(iii) Les groupes $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$;

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$. Plus précisément, si $a, b \in \mathbb{Z}$ alors

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Théorème 1.1 Soit H une partie non vide d'un groupe G , alors H est sous-groupe de G si seulement si

$$\forall (x, y) [(x, y) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H]$$

Preuve

(i) Supposons $H \leq G$, soit $(x, y) \in H \times H$, alors $y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$, par suite

$$(x, y^{-1}) \in H \times H \Rightarrow x \times y^{-1} \in H$$

(ii) Supposons $\forall (x, y) [(x, y) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H]$ est vérifiée, soit $(x, y) \in H \times H$.

$$x \in H \Rightarrow (x, x) \in H \times H \Rightarrow xx^{-1} = e \in H;$$

$$e \in H \text{ et } x \in H \Rightarrow (e, x) \in H \times H \Rightarrow ex^{-1} = x^{-1} \in H;$$

par suite,

$$(x, y) \in H \times H \Rightarrow (x, y^{-1}) \in H \times H, \Rightarrow xy \in H.$$

Remarque 1.3 Tout sous-groupe est groupe

Définition 1.7 (Sous-groupe engendré) Soient G un groupe et B une partie de G , le plus petit sous-groupe de G qui contient B est appelé sous-groupe engendré par B noté $\langle B \rangle$.

Et $\langle B \rangle = \cap_{i=1}^n H_i$, (H_i) des sous-groupes de G qui contiennent B une partie génératrice de $\langle B \rangle$, et les éléments de B on appelé générateur de $\langle B \rangle$.

Proposition 1.1

- (i) l'intersection fini des groupes est un groupe ;
- (ii) l'union fini des groupes n'est pas nécessairement un groupe.

Définition 1.8 (sous-groupes normaux) Soit G un groupe, H est sous-groupe de G , H est dit normal (ou distingué) et on noté $H \trianglelefteq G$ si :

$$xH = Hx.$$

- Exemples 1.5**
- 1. e et G des sous-groupes normaux ;
 - 2. soit G un groupe abélien, tout sous-groupe est normal.

Théorème 1.2 H est sous-groupe normal de G ; alors les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $Hx = xH, \forall x \in G$;
- (ii) $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$;
- (iii) $x^{-1}Hx = H, \forall x \in G$;
- (iv) $xHx^{-1} \subseteq H, \forall x \in G$;
- (v) $x^{-1}Hx \subseteq H, \forall x \in G$.

Preuve

$$(i) \Leftrightarrow (ii)$$

Supposons $Hx = xH$; pour tout $h \in H$, il existe $h' \in H$ tel que $hx = xh'$ i.e : $h = xh'x^{-1}$, d'où $H \subseteq xHx^{-1}$;

l'hypothèse implique aussi que, pour tout $h \in H$, il existe $h'' \in H$ tel que $xh = h''x$ i.e $xhx^{-1} = h''$; d'où $xHx^{-1} \subseteq H$; (ii) \Leftrightarrow (iii) et (iv) \Leftrightarrow (v)

Compte tenu de la bijection $x \mapsto x^{-1}$ de G sur lui-même ;

$(i) \Leftrightarrow (iv)$

Si $Hx = xH$, alors pour tout $h \in H, xh \in H$, donc $xhx^{-1} \in H$; on en déduit : $(i) \Rightarrow (iv)$.

Supposons (iv) vérifiée; soit $xh \in xH$; alors (iv) implique $xhx^{-1} \in H$, donc il existe $h' \in H$ tel que $xhx^{-1} = h'$, i.e $xh = h'x$; par suit $xH \subseteq Hx$.

On prouverait de même que $Hx \subseteq xH$ d'où $(iv) \Rightarrow (i)$.

Définition 1.9 Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ son **center** :

$$Z(G) = \{a \in G; ax = xa, \forall x \in G\}.$$

Proposition 1.2 $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G pour tout $x \in G$.

Remarque 1.4 G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.

Définition 1.10 G est dit **simple**, si G ne possède aucun sous-groupe normal propre et différent de G et e .

Exemple 1.1 Tout groupe fini dont l'ordre est un nombre premier est dit simple.

Définition 1.11 (Groupes cycliques) Soit $(G, .)$ un groupe, si l'ensemble G est fini, alors le groupe $(G, .)$ est dit un groupe fini (le groupe engendré par une partie de cardinal fini est dit de type fini $G = \langle B \rangle$ et $|B|$ est fini $\Leftrightarrow G$ de type fini) et le cardinal de G est appelé l'ordre de G noté $|G|$ ou bien $O(G)$.

Définition 1.12 (Groupes monogènes) Soit G un groupe et $\langle B \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par l'élément x , le groupe G est dit **monogène** si $G = \langle x \rangle$.

Si G un groupe monogène fini ($|G|=n$), alors on dit que G est un groupe cyclique d'ordre n .

1.2.3 Morphisme de groupes

Définition 1.13 Soit $(G, .)$ et $(G', *)$ deux groupes

(i) On dit que l'application $f : G \longrightarrow G'$ est morphisme si

$$\forall x, x' \in G \quad f(x.x') = f(x) * f(x').$$

L'ensemble des morphismes d'un groupe G dans un groupe G' note $\text{Hom}(G, G')$;

- (ii) On dit que l'application f est isomorphisme si f est morphisme bijective, est noté $G \cong G'$;
- (iii) On dit que l'application f est endomorphisme si f est un morphisme de G dans lui-même, est noté $\text{End}(G)$;
- (iv) On dit que l'application f est automorphisme si f est endomorphisme bijective de lui-même, est noté $\text{Aut}(G)$;
- (v) On dit que l'application f est monomorphisme si f morphisme injective,
- (vi) On dit que l'application f est épimorphisme si f morphisme surjective.

Proposition 1.3 Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupe, alors :

- (i) L'image d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G' ;
- (ii) L'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G .

Propriétés 1.1 Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes alors :

- (i) $f(e_G) = e_{G'}$;
- (ii) pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = f^{-1}(x)$.

Exemples 1.6 (i) $x \mapsto 2x$ réalise un isomorphisme de $(R, +)$ sur (R_+^*, \times) ;

(ii) $x \mapsto 2x$ réalise un automorphisme de $(R, +)$;

(iii) $z \mapsto |z|$ réalise un morphisme de (C^*, \times) dans (R^*, \times) .

1.3 Anneau classique

Les ensembles de nombres dans lesquels les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication s'effectuent sans restriction sont appelés anneaux.

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 1.14 (Anneau) Un anneau $(A, +, \times)$ est la donnée d'un ensemble non vide A muni de deux lois de composition internes, notées "+" et "×" (appelées respectivement addition et multiplication), telles que :

- (i) $(A, +)$ est un groupe abélien (on notera 0 son élément neutre)

(ii) La loi " \times " est associative ;

(iii) La loi " \times " est distributive par rapport à la loi " $+$ " $\forall x, y, z \in A; x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
 $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

Remarques 1.1 (i) Si la loi " \times " est **commutative** i.e $\forall x, y \in A; x \times y = y \times x$; on dit que l'anneau A est commutatif;

(ii) Si la loi " \times " possédé un élément neutre 1, on dit que A est un anneau unitaire et 1 s'appelle **l'unité de A** .

Exemples 1.7 $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs unitaires.

Définition 1.15 Un anneau commutatif A est dit **intègre** s'il est non nul, et si pour tous a, b de A , la condition $a \times b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemple 1.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.

Définition 1.16 Un élément a d'un anneau A est **un diviseur de zéro**, s'il est non nul, et s'il existe b non nul tel que $a \times b = 0$.

Exemples 1.8 Soit $(6\mathbb{Z}, +, \times)$ est anneau, est soit $2, 3 \in (6\mathbb{Z}, +, \times)$ tel que : $2 \times 3 = 0$ dans $6\mathbb{Z}$. Donc 2 et 3 est une diviseur de zéro.

$M(2; R)$ n'est pas intègre puisque par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux éléments du membre de gauche sont appelés des "diviseurs de zéro".

Proposition 1.4 Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire. L'ensemble des éléments inversibles (symétriques pour la loi \times), c'est-à-dire $A^\times = \{x \in A / \exists y \in A : y \times x = x \times y = 1_A\}$, a une structure de groupe.

Il est également appelé **groupe des unités de A** s'il est muni de la multiplication et il est noté $U(A)$.

1.3.2 Propriétés des anneaux

Définition 1.17 (sous-anneaux) Soit S est une partie non vide de A , on dit que S est un sous-anneau si $(S, +, \times)$ est anneau.

Exemple 1.3 (i) $(2\mathbb{Z}, +, \times)$ sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$,

(ii) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Proposition 1.5 Soit A un anneau et S un sous-anneau de A si et seulement si pour tout $x, y \in S : x + y \in S$, et $x \times y \in S$.

Preuve

(i) S un sous-anneau de A , $(S, +, \times)$ est un anneau d'où le résultat,

(ii) Pour tout $x + y \in S, x \times y \in S$

$(S, +)$ sous-groupe de $(A, +)$,

Il est que $(S, +, \times)$ est anneau, et on a S est une partie de A , donc $(S, +, \times)$ est un sous-anneau.

Proposition 1.6 (i) Toute intersection des sous-anneaux est un anneau;

(ii) Toute union des sous-anneaux n'est pas nécessairement un anneau;

(iii) Tout sous-anneau d'anneau commutatif (respectivement intègre) est commutatif (respectivement intègre).

Définition 1.18 Soit $(A; +, \times)$ un anneau. Un idéal bilatère de A est une partie non vide de A si :

(i) $\forall x, y \in I ;$ on a $x + y \in I$,

(ii) $\forall a \in A ; \forall x \in I$ on a : $x \times a \in I$ et $a \times x \in I$.

Exemple 1.4 (i) 0 et A sont des idéaux de A . Ce sont les seuls si A est un corps.

(ii) Les idéaux de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.7 L'intersection d'idéaux est un idéal, la somme finie (infinie dénombrable) de deux idéaux est un idéal.

Remarque 1.5 *Faux en général avec l'union.*

Définition 1.19 *Soit A un anneau. Un idéal I est dit **premier**, s'il est propre ($I \neq A$), et s'il vérifie :*

$$\forall x, y \in A; x \times y \in I \Leftrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Exemple 1.5 *Pour $A = \mathbb{Z}$; soit $I = (5) = 5\mathbb{Z}$, I est idéal premier de \mathbb{Z} car si $x, y \in \mathbb{Z}$, tels que $x \times y \in 5\mathbb{Z}$.*

On a $5/x \times y$; et comme 5 est premier, alors $5/x$ ou $5/y$ c'est à dire $x \in 5\mathbb{Z}$ ou $y \in 5\mathbb{Z}$.

Définition 1.20 *Un idéal I est un idéal maximal dans A si :*

- a) $I \neq A$ et,
- b) Si J est un idéal de A tel que : $I \subset J$ alors $J = I$ ou $J = A$

Exemple 1.6 $A = \mathbb{Z}; I = 3\mathbb{Z}$; I est idéal maximal car on a $3\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$; et si $J = n\mathbb{Z}$ un idéal de \mathbb{Z} vérifiant $3\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, alors $n/3$ d'où $n = 1$ ou $n = 3$

Si $n = 1$ alors $J = \mathbb{Z} = A$, si $n = 3$ alors $J = 3\mathbb{Z} = I$.

Proposition 1.8 *Soient A un anneau commutatif unitaire, et I un idéal de A :*

- (i) $1 \in I \Leftrightarrow I = A$;
- (ii) Soit $x \in U(A)$: $x \in I \Leftrightarrow I = A$

Preuve

- (i) L'implication (\Rightarrow) est évidente \Leftarrow) Supposons que $1 \in I$. Comme $I \subset A$, il suffit de montrer que $A \subset I$.

Soit $x \in A$ et $1 \in I$ et comme I est un idéal de A alors $x \times 1 = 1 \times x = x \in I$

Donc $A \subset I$.

- (ii) Soit $x \in U(A)$ L'implication (\Leftarrow) est évidente

\Rightarrow) Si $x \in I$ avec $x \in U(A)$, alors $\exists y \in A$ tel que $x \times y = y \times x = 1$

Il résulte que $1 \in I$; donc $I = A$.

Corollaire 1.1 *Soit X un sous-ensemble de A , on appelle idéal engendré par X le plus petit idéal contenant X .*

Définition 1.21 Anneaux principaux Soit A un anneau et I un idéal de A . On dit que I est un idéal principal de A si $\exists a \in A$ tel que $I = (a) = \{a \times x / x \in A\}$.

Définition 1.22 Un anneau est dit principal s'il est intègre et si tout ses idéaux sont principaux.

Exemple 1.7 (i) Tout corps est un anneau principal,

(ii) $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau intègre non principal car si l'on considère l'idéal engendré par X et 2 , il n'est pas principal,

(iii) $\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$ est non intègre mais tout idéal est principal (car les seuls idéaux sont 0 et $\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$).

Définition 1.23 (anneau euclidien) L'anneau $(A; +; \times)$ est dit euclidien s'il est intègre et s'il est muni d'une application $\varphi : A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout couple $(a; b)$ d'éléments non nuls de A ,

- Si b divise a , $\varphi(b) \leq \varphi(a)$; - Si b ne divise pas a , il existe q et r dans A vérifiant $a = b \times q + r$ et $\varphi(r) \leq \varphi(b)$.

On dit que φ un stathme euclidien de A .

On pose $\varphi(0_A) = -\infty$. Ainsi le second point reste correct si b divise a ,

Exemple 1.8 \mathbb{Z} muni de la valeur absolue est euclidien.

Proposition 1.9 Si $(A; +; \times)$ est un anneau euclidien, alors A est principal.

Preuve Soit I un idéal de A : Si $I = \{0\}$; alors $I = (0)$.

Supposons que $I \neq \{0\}$; soit $a \in I - \{0\}$ tel que $\varphi(a) = \min\{\varphi(x); x \in I - \{0\}\}$

$a \in I$ alors

$$(a) \subset I \quad (1)$$

Soit $x \in I, \exists q; r \in A$ tels que $x = a \times q + r$ avec $r = 0$ ou $\varphi(r) \leq \varphi(a)$. On a $r = x - a \times q \in I$ car I est idéal et on a $\varphi(r) \leq \varphi(a)$ est impossible par définition de a .

Donc $r = 0$ d'où $x = a \times q$ et donc $x \in (a)$ alors

$$I \subset (a) \quad (2)$$

De (1) et (2) on a $I = (a)$, donc A est principal .

Définition 1.24 (anneau noethérien) *Un anneau est dit noethérien si et seulement si tout idéal est de type fini.*

Proposition 1.10 *Dans un anneau principal, tout idéal est de type fini, i.e. un anneau principal est noethérien.*

(Réciproque est fausse : $\mathbb{Z}[X]$ est noethérien (théorème de transfert de Hilbert) mais n'est pas principal).

1.3.3 Morphisme d'anneaux

Définition 1.25 (i) *Un homomorphisme (morphisme) d'anneau est une application*

$f : A \longrightarrow B$ telle que

$$(i) \quad \forall x, y \in A, f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in A, f(x \times y) = f(x) \times f(y).$$

(ii) *On dit que l'application f est un monomorphisme si f est un morphisme injective,*

(iii) *On dit que l'application f est un épimorphisme si f morphisme surjective ,*

(iv) *On dit que l'application f est un isomorphisme si f est un morphisme bejective, et dans ce cas on dit que A et B sont isomorphe.*

Propriétés 1.2 (i) $f(0_A) = 0_B,$

$$(ii) \quad f(1_A) = 1_B,$$

$$(iii) \quad f(-x) = -f(x),$$

$$(iv) \quad f(x^n) = (f(x))^n, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Exemples 1.9 (i) $f \longmapsto f(\pi)$ réalise un morphisme d'anneaux de R^R sur R ;

(ii) $z \longmapsto \bar{z}$ réalise un automorphisme d'anneaux de \mathbb{C} .

(iii) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneau unitaire. On a $f(U(A)) \rightarrow U(B)$ est morphisme d'anneau.

Chapitre 2

Ensemble flou

Les ensembles flous constituent une généralisation de notion d'ensemble classique et ont été introduits par Lotfi Zadeh en 1965. Dans ce chapitre, nous présentons le concept de base de ensemble flou, sa position par rapport à la théorie des ensembles classiques, les propriétés fondamentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques dans un ensemble flou. On se réfère à [5], [6], [9] et [17] avant d'entamer la définition de sous-ensemble flou on procède à définir l'ensemble classique.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1 (Ensemble classique) *Un ensemble \mathcal{A} de l'univers de discours X est une collection non ambiguë d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble.*

Un ensemble peut être défini par :

- (i) *L'écriture de ses éléments. Par exemple, si a_1, a_2, \dots, a_n sont les éléments de l'ensemble \mathcal{A} , on écrit : $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;*
- (ii) *Les propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble \mathcal{B} satisfaisant les conditions p_1, p_2, \dots, p_n alors l'ensemble \mathcal{B} est définie par :*

$$\mathcal{B} = \{b \mid b \text{ satisfait } p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

où le symbole " \mid " désigne la phrase "telle que";

- (iii) *En fonction caractéristique : est un sous-ensemble classique \mathcal{A} de X est défini par **une fonction caractéristique** $\chi_{\mathcal{A}}$ qui prend la valeur 0 pour les éléments n'appartient pas à*

A et la valeur 1 pour ceux qui appartient à A :

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Exemples 2.1 1. Soit $X = [a, b]$ tel que $a, b \in R$ et soit A un sous-ensemble classique de X définie par :

$$\mu_A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } a < x < b. \end{cases}$$

Définition 2.2 (ensemble flou) Soit X un ensemble (classique) de référence, un sous ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance, qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_A(x)$ compris entre 0 et 1.

$$A = \{ \langle x; \mu_A(x) \rangle = x \in X \}$$

Remarque 2.1 le sous-ensemble flou A de X est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ qui assoie, à chaque point x de X un réel dans l'intervalle $[0, 1]$; $\mu_A(x)$ est une fonction de degré d'appartenance de x à A . On observe les trois cas suivant :

(i) $\mu_A(x) = 0$ n'appartient pas à A ;

(ii) $0 < \mu_A(x) < 1$ si x appartient partiellement à A ;

(iii) $\mu_A(x) = 1$ si x appartient à A .

Exemple 2.1 Si X est l'ensemble des nation du monde on peut définir le sous ensemble flou A des nation francophones, le degré de francophonie étant d'autant plus petit, par exemple, que le nombre de langues parlées officiellement dans le pays est grand , avec la fonction d'appartenance suivante :

$$A = \{ \langle France; 1 \rangle; \langle Belgique; 0, 5 \rangle; \langle Suisse; 0, 25 \rangle; \langle Canada; 0, 5 \rangle; \langle Espagne; 0 \rangle \}$$

2.2 Caractéristiques d'un ensemble flou

Définition 2.3 (Le support) de A , noté $\text{supp}(A)$, est la partie de X sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle :

$$\text{supp}(A) = \{x \in X, \mu_A(x) \neq 0\}.$$

Définition 2.4 (La hauteur) , notée $h(A)$, du sous-ensemble flou A de X est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance :

$$h(x) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Définition 2.5 (Le noyau) de A , noté $\text{noy}(A)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A vaut 1 :

$$\text{noy}(A) = \{x \in X, \mu_A(x) = 1\}$$

.

Définition 2.6 (Le cardinal) de sous-ensemble flou A de X est définie par :

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Proposition 2.1 Le noyau et le support d'un sous-ensemble flou vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{Supp}(A^c) = X - \text{Noy}(A),$$

$$\text{Noy}(A^c) = X - \text{Supp}(A).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Supp}(A^c) &= \{x \in X \mid \mu_{A^c}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid 1 - \mu_A(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin \text{Noy}(A)\} \\ &= X - \text{Noy}(A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noy}(A^c) &= \{x \in X \mid \mu_{A^c}(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid 1 - \mu_A(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin \text{supp}(A)\} \\ &= X - \text{supp}(A). \end{aligned}$$

Exemple 2.2 Soit $X = \{a, b, e, g, f, i\}$, et soit le sous ensemble flou A donnée par :

$$A = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle e, 0.4 \rangle, \langle f, 0.3 \rangle, \langle g, 0.8 \rangle, \langle i, 0.5 \rangle\}.$$

- $\text{supp}(A) = X$,
- $h(A) = 0.8$,
- $\text{noy}(A) = \emptyset$,
- $|A| = 3.3$.

2.3 Opérations sur les ensembles flous

Définition 2.7 (l'égalité) Deux sous-ensemble flou A et B sont égaux si leurs fonction d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément de X :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Définition 2.8 (l'inclusion) Étant donné deux sous-ensemble flous A et B de X , on dit que A est inclus dans B et on noté $A \subseteq B$, si leurs fonction d'appartenance sont telles que :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Définition 2.9 (l'intersection) de deux sous-ensemble flou A et B de X est le sous ensemble flous C , que l'on noté $A \cap B$, tel que :

$$\forall x \in X, \mu_c(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Définition 2.10 (l'union) de deux sous-ensemble flous A et B de X est le sous ensemble flou D , que l'on noté $A \cup B$, tel que :

$$\forall x \in X, \mu_D(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Définition 2.11 (Addition) de deux sous-ensemble flous A et B de X est le sous ensemble flou, que l'on noté $A + B$, tel que :

$$A + B = \{\langle x; \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x) \rangle / x \in E\}$$

Définition 2.12 (Multiplication) de deux sous-ensemble flous A et B de X est le sous-ensemble flou, que l'on noté $A \times B$, tel que :

$$A \times B = \{\langle x; \mu_A(x) \times \mu_B(x) \rangle / x \in E\}$$

Définition 2.13 (Complément) A^c d'un sous-ensemble A de X est défini comme le sous-ensemble flou de X de fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Exemple 2.3 Soit $X = 1; 2; 3; 4; 5$ et soient $A; B$ deux sous-ensembles flous de X donnée par :

$$A = \{\langle 1; 0, 2 \rangle; \langle 2; 0, 3 \rangle; \langle 3; 0, 5 \rangle; \langle 4; 0, 5 \rangle; \langle 5; 0, 9 \rangle\};$$

$$B = \{\langle 1; 0, 6 \rangle; \langle 2; 0, 8 \rangle; \langle 3; 0, 8 \rangle; \langle 4; 0, 9 \rangle; \langle 5; 1 \rangle\}$$

Alors on obtient :

$$A^c = \{\langle 1; 0, 8 \rangle; \langle 2; 0, 7 \rangle; \langle 3; 0, 5 \rangle; \langle 4; 0, 5 \rangle; \langle 5; 0, 1 \rangle\};$$

$$A \cup B = \{\langle 1; 0, 6 \rangle; \langle 2; 0, 8 \rangle; \langle 3; 0, 8 \rangle; \langle 4; 0, 9 \rangle; \langle 5; 1 \rangle\};$$

$$A \cap B = \{\langle 1; 0, 2 \rangle; \langle 2; 0, 3 \rangle; \langle 3; 0, 5 \rangle; \langle 4; 0, 5 \rangle; \langle 5; 0, 9 \rangle\};$$

$$A + B = \{\langle 1; 0, 68 \rangle; \langle 2; 0, 86 \rangle; \langle 3; 0, 8 \rangle; \langle 4; 0, 95 \rangle; \langle 5; 1 \rangle\};$$

$$A \times B = \{\langle 1; 0, 12 \rangle; \langle 2; 0, 24 \rangle; \langle 3; 0, 4 \rangle; \langle 4; 0, 45 \rangle; \langle 5; 0, 9 \rangle\}.$$

Propriétés 2.1 1. Loi De Morgan : $(A \cap B) = A^c \cup B^c, (A \cup B) = A^c \cap B^c$;

$$2. (A^c)^c = A;$$

$$3. \emptyset^c = X;$$

$$4. X^c = \emptyset;$$

$$5. |A| + |A^c| = |X|.$$

2.4 Propriétés des ensembles flous

Définition 2.14 (Les α -coupes(les niveaux de flou)) Pour un seuil donné α de $[0, 1]$, on définit la α -coupe du sous-ensemble flou A de X (ou sous-ensemble de niveau α associé à A) comme le sous-ensemble

$$A_\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Dont la fonction caractéristique χ_{A_α} est telle que $\chi_{A_\alpha}(x)$ est égale à 1 si et seulement si $\mu_A(x)$ est supérieur ou égale à 1.

Définition 2.15 (Le niveau strict de flou) Pour tout niveau α de $[0, 1]$, on définit la α -coupe strict du sous-ensemble flou A comme le sous-ensemble

$$A^\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Proposition 2.2 Les α -coupes vérifient :

- (i) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$;
- (ii) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$;
- (iii) $A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha$;
- (iv) $A_1 = \text{noy}(A)$;
- (v) $A_0 = X$.

Les niveaux stricts de flous ont les mêmes propriétés que les niveaux de flous.

Théorème 2.1 (Théorème de décomposition) Tout sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α -coupes par :

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A^\alpha}(x)$$

ou \sup indique le suprême (la borne supérieure des valeurs possibles) et χ_{A^α} est la fonction caractéristique de A^α

Preuve :

Soit $x \in X$; on pose $\mu(x) = \alpha$ tel que $\alpha \in [0, 1]$ On a,

$$\begin{cases} \mu_\alpha(x) = 1 & \text{si } \mu_\alpha(x) \geq \alpha; \\ \mu_\alpha(x) = 0 & \text{si } \mu_\alpha(x) < \alpha; \end{cases}$$

Donc, $\alpha \mu_\alpha(x) = \alpha = \mu(x)$;

D'ou ; $\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \mu_\alpha(x)) \geq \mu(x)$; (1)

D'autre part on a :

$$\begin{cases} \mu_\alpha(x) = 1 & \text{si } \mu_\alpha(x) \geq \alpha. \\ \mu_\alpha(x) = 0 & \text{si } \mu_\alpha(x) < \alpha; \end{cases} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Alors

$$\begin{cases} \alpha\mu_\alpha(x) = \alpha & \text{si } \mu_\alpha(x) \geq \alpha; \\ \mu_\alpha(x) = 0 & \text{si } \mu_\alpha(x) < \alpha; \end{cases} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

On remarque dans les deux cas que : $\alpha\mu_\alpha(x) \leq \alpha; \forall \alpha \in [0, 1]$

$$\text{D'ou } \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha\mu_\alpha(x)) \leq \mu(x); \quad (2)$$

De (1) et (2) on a $\forall x \in X \quad \mu(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha\mu_\alpha(x)).$

Exemple 2.4 Soient A et B deux sous-ensembles flous de X telle que :

$$A = \{\langle 1, 0.7 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.4 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}.$$

$$B = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}.$$

$$A \cup B = \{\langle 1, 0.7 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}.$$

$$A \cap B = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.5 \rangle, \langle 3, 0.4 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}.$$

On a :

- $A_{0.4} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.4\}$, donc $A_{0.4} = \{1, 2, 3, 5\}$,
- $B_{0.4} = \{x \in X / \mu_B(x) \geq 0.4\}$, donc $B_{0.4} = \{2, 3, 4, 5\}$,
- $A^{0.4} = \{x \in X / \mu_A(x) > 0.4\}$, donc $A^{0.4} = \{1, 2, 5\}$,
- $B^{0.4} = \{x \in X / \mu_B(x) > 0.4\}$, donc $B^{0.4} = \{2, 3, 5\}$,
- $A_{0.4} \cup B_{0.4} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $A_{0.4} \cap B_{0.4} = \{2, 3, 5\}$,
- $A^{0.4} \cup B^{0.4} = \{1, 2, 3, 5\}$,
- $A^{0.4} \cap B^{0.4} = \{2, 5\}$,
- $(A \cup B)_{0.4} = \{x \in X / \mu_{A \cup B}(x) \geq 0.4\}$, donc $(A \cup B)_{0.4} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et on a aussi l'égalité $(A \cup B)_{0.4} = A_{0.4} \cup B_{0.4}$.
- $(A \cap B)_{0.4} = \{x \in X / \mu_{A \cap B}(x) \geq 0.4\}$, donc $(A \cap B)_{0.4} = \{2, 3, 5\}$, et on a aussi l'égalité

$$(A \cap B)_{0.4} = A_{0.4} \cap B_{0.4}.$$

- $(A \cup B)^{0.4} = \{x \in X / \mu_{A \cup B}(x) > 0.4\}$, donc $(A \cup B)^{0.4} = \{1, 2, 3, 5\}$, et on a aussi l'égalité

$$(A \cup B)^{0.4} = A^{0.4} \cup B^{0.4}.$$

- $(A \cap B)^{0.4} = \{x \in X / \mu_{A \cap B}(x) > 0.4\}$, donc $(A \cap B)^{0.4} = \{2, 5\}$, et on a aussi l'égalité

$$(A \cap B)^{0.4} = A^{0.4} \cap B^{0.4}.$$

2.5 Norme et conorme triangulaires

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métrique aléatoires et on fait appel à eux lorsque les opérateurs habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes.

2.5.1 Définitions et exemples

Définition 2.16 (*Norme triangulaire*) Une norme triangulaire (*t-norme*) est une fonction $T : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- (T1) *Commutativité* : $\forall x, y \in [0, 1], T(x, y) = T(y, x)$;
- (T2) *Associativité* : $\forall x, y, z \in [0, 1], T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$;
- (T3) *Monotonie* : $\forall x, y, z \in [0, 1], (x \leq y \Rightarrow T(x, z) \leq T(y, z))$;
- (T4) *Élément neutre 1* : $\forall x \in [0, 1], T(x, 1) = x$.

Cas particulier : L'opérateur min satisfait ces propriétés donc on peut définir l'intersection de deux sous-ensembles flous par l'opérateur t-conorme $A \cap_T B$ telle que :

$$\mu_{A \cap_T B} = T(\mu_A, \mu_B).$$

Définition 2.17 (*Conorme triangulaire*) Une conorme triangulaire (*t-conorme*) est une fonction $S : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- (T1) *Commutativité* : $\forall x, y \in [0, 1], S(x, y) = S(y, x)$;
- (T2) *Associativité* : $\forall x, y, z \in [0, 1], S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$;
- (T3) *Monotonie* : $\forall x, y, z \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow S(x, z) \leq S(y, z)$;
- (T5) *Élément neutre 0* : $\forall x \in [0, 1], S(x, 0) = x$.

Cas particulier : L'opérateur max satisfait ces propriétés donc on peut définir l'union de deux sous-ensembles flous par l'opérateur t-norme $A \cup_S B$ telle que :

$$\mu_{A \cup_S B} = S(\mu_A, \mu_B).$$

2.5.2 Négation et dualité entre opérateurs

Définition 2.18 (*L'opérateur négation*) Une négation est une fonction $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

$$(i) \quad n(0) = 1 \text{ et } n(1) = 0 ;$$

$$(ii) \quad \text{Monotonie } \forall x, y \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow n(y) \leq n(x).$$

Cas particulier : La complémentation à 1 (défini par $n(x) = 1 - x$) est une négation strict et involutive donc on peut définir le complément d'un sous-ensemble flou par l'opérateur négation A^{c_n} telle que :

$$A^{c_n} = n(\mu_A(x)).$$

Définition 2.19 (*Dualité entre opérateurs*) Une t -norme T et une t -conorme S sont dites duales pour la négation strict n si elles satisfaisant les relations suivantes pour tous x et y de $[0, 1]$:

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y)));$$

$$T(x, y) = n(S(n(x), n(y))).$$

2.5.3 Propriétés des t -normes et t -conormes

Les t - norme et t - conorme ont les propriétés suivants :

(1) Toute t -norme T et t -conorme S vérifient :

$$T(0, 0) = 0, T(1, 1) = 1, S(0, 0) = 0, S(1, 1) = 1$$

L'opérateur "min" est la plus grande des t -normes telle que :

$$\forall x, y \in [0, 1], T(x, y) \leq \min(x, y).$$

Si l'opérateur t -norme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide le "min" c.à.d :

$$\forall x, y \in [0, 1], T(x, y) = \min(x, y) ;$$

(2) L'opérateur $S = \max$ est la plus petite des t -conormes tell que :

$$\forall x, y \in [0, 1], \max(x, y) \leq S(x, y).$$

Si l'opérateur t-norme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide le max c.à.d :

$$\forall x, y \in [0, 1], S(x, y) = \max(x, y);$$

Toute t-normes T et toute t-conormes S vérifient les inégalités suivantes :

Pour tout $x, y \in [0, 1]$

$$T_{drastique}(x, y) \leq T(x, y) \leq \min(x, y);$$

$$\max(x, y) \leq (x; y) \leq S_{drastique}(x, y);$$

(3) Les opérateurs de Hamacher deviennent les opérateurs drastiques si γ tend vers l'infini est sont identiques aux opérateurs probabilistes si $\gamma = 1$. Les opérateurs de Yager sont identiques à ceux de Lukasiewicz quand $P = 1$ et tendent vers ceux de [Zadeh] quand P tend vers l'infini.

(4) Une t-conorme S est dit **archimédienne** si et seulement si :

$S(x, y)$ est continue telle que $S(x, x) > u$, pour tout $u \in]0, 1[$

(5) Une t-conorme archimédienne est **stricte** si et seulement si :

$S(x, y) < S(z, t)$ dès que $x < z$ et $y < t$.

Remarque 2.2 Soit T Une norme triangulaire, l'application S définit comme :

$$[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

Est le dual t-conorme de T

Différentes normes et conormes triangulaires

t-norme	t-conorme	nom
$\min(x, y)$	$\max(x, y)$	Zadeh
$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	<i>Hamacher</i> ($\gamma > 0$)
xy	$x + y - xy$	probabiliste
$\max\left(1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, 0\right)$	$\min\left((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}, 1\right)$	<i>Yager</i> ($p > 0$)
$\max((x + y - 1 + \lambda xy) / (1 + \lambda), 0)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$	<i>Weber</i> ($\lambda > -1$)
x si $y = 1$ y si $x = 1$ 0 sinon	x si $y = 0$ y si $x = 0$ 1 sinon	drastique

2.5.4 Extensions des opérations sur les ensembles flous

Toute t-norme est un opérateur d'intersection, c'est-à-dire on peut définir $A \cap_T B$ par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Toute t-conorme est un opérateur d'union, c'est-à-dire on peut définir $A \cup_S B$ par sa fonction d'appartenance ainsi :

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Exemple 2.5 On définit respectivement l'intersection et l'union par :

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \max(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0).$$

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1).$$

Chapitre 3

Groupes et anneaux flous

Ce chapitre est une initiation aux groupes et anneaux flous, on va développer Certaines propriétés algébriques seront développées. Pour plus de détails [10], [11], [12] et [14].

3.1 Groupe flou (vision I)

Cette section est une initiation à l'étude générale des groupes flous, cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien Rosenfeld [12]. Dans cette section on va développer la notion de groupe flou et quelques propriétés fondamentales. Pour plus d'étude sur les définitions et les propriétés des groupes flous voir [2,12,14]

3.1.1 Définitions et exemples

soit (G, L) est structure floue, G est un groupe quelconque de élément neutre e , et $L = [0, 1]$.

Définition 3.1 (Groupe flou) [12] soit G un groupe (au sens classique), un sous groupe flou (ou un groupe flou, tout simplement) de G est un ensemble flou H de G vérifie les axiomes suivants :

- (i) $\mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, pour tous $x, y \in G$;
- (ii) $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$, pour tout $x \in G$.

Exemples 3.1 1. Pour tout α , $(\delta \equiv \alpha)$ (application constante égale α par tout) est un groupe flou, en particulier $(\delta \equiv 0) = \emptyset$.

2. pour tout α de L le point flou e_α (défini par $e_\alpha(x) = 0$ si $x \neq e$ et $e_\alpha(e) = \alpha$) est un groupe flou.

3.1.2 Propriétés des groupes flous

Propriétés 3.1 Soit G un groupe et H un groupe flou de G . Alors

- (i) Pour tout x de G , $\mu_H(x) \leq \mu_H(e)$;
- (ii) Pour tout x de G , $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x)$;
- (iii) pour tout n de \mathbb{Z} , tout x de G , $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$.

Preuve :

- (i) $\mu_H(xx^{-1}) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1}))$ et on a $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$ d'après la définition de groupe flou, alors $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$.
- (ii) $\mu_H(x) \geq \mu_H((x^{-1})^{-1})$, or $\mu_H((x^{-1})^{-1}) \geq \mu_H(x)$
d'après la définition de groupe flou, $\mu_H(x) \geq \mu_H(x^{-1})$ et comme $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$, alors $\mu_H(x) = \mu_H(x^{-1})$.
- (iii) Pour tout n de \mathbb{N} , on raisonne par récurrence :
 - (i) Si $n = 0$, $\mu_H(x^0) = \mu_H(e) \geq \mu_H(x)$, d'après la définition de sous-groupe flou
 - (ii) Si $n \geq 0$ supposons que : $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$ est vrai et montrons que $\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x)$.
On a $\mu_H(x^{n+1}) = \mu_H(x^n x) \geq (\mu_H(x^n) \wedge \mu_H(x))$, d'après (3), et comme par hypothèse on a : $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(x)$, donc $\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x)$,
alors la propriété est vraie pour tout n de \mathbb{N} ,
 - (iii) Si $n \leq 0$, $\mu_H(x^n) = \mu_H((x^{-1})^{-n})$,
d'après la précédent, et comme $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x)$, alors $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$.

Proposition 3.1 Soit G un groupe et H un ensemble flou de G . Alors H est un groupe flou de G si et seulement si

$$\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y).$$

Preuve :

Si H est un sous groupe flou, pour tout x, y de G $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$ et $\mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$, donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$.

Réciproquement, si pour tout x, y de G , $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$, alors :

(i) Pour tout x de G , $\mu_H(e) = \mu_H(xx^{-1}) = \mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1})$, soit $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$,

(ii) Pour tout x de G , $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(ex^{-1}) \geq \mu_H(e) \wedge \mu_H(x^{-1})$

Et comme $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$, $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$.

(iii) Pour tout x, y de G : $\mu_H(xy) = \mu_H(x(y^{-1})^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$,

Et comme $\mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$, $\mu_H(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(y))$ par conséquent, H est groupe flou de G .

Proposition 3.2 Soit H un sous-ensemble de G , $\mu_H = H$ sa fonction caractéristique. Alors, H est un groupe flou de G , si et seulement si H est un groupe flou non nul de (G, L) .

Preuve :

Supposons que H est un groupe flou de G ; alors $\mu_e = 1$, donc $H \neq \emptyset$; soit x, y de G , si $x \in H$ et $y \in H$ et par suite $\mu_H(xy^{-1}) = 1 = \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$; si $x \notin H$ ou $y \notin H$, $\mu_H(x) = 0$ ou $\mu_H(y) = 0$, d'où $\mu_H(x) \wedge \mu_H(y) = 0 \leq \mu_H(xy^{-1})$; par conséquent, d'après 3 Propriétés 3.1 H est groupe flou de (G, L) .

Réciproquement, comme H n'est nul, il existe $x \in G$ tel que $\mu_H(x) = 0$, donc $\mu_H(x) = 1$, ce que prouve que $H \neq \emptyset$; de plus, si $x, y \in H$, $\mu_H(x) = \mu_H(y) = 1$, d'où comme $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, $\mu_H(xy^{-1}) = 1$ et par suite $xy^{-1} \in H$; donc H est groupe flou de G .

Proposition 3.3 l'interaction de deux groupe flou est un groupe flou de G .

Preuve :

Soit H et H' deux groupes flous de G tel que : (i) Pour tout $x, y \in G$ on a :

$$\mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y);$$

$$\mu_{H'}(xy) \geq \mu_{H'}(x) \wedge \mu_{H'}(y).$$

donc :

$$\mu_H(xy) \wedge \mu_{H'}(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(y)) \wedge \mu_{H'}(x) \wedge \mu_{H'}(y);$$

$$\mu_{H \cap H'}(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_{H'}(x)) \wedge (\mu_H(y) \wedge \mu_{H'}(y));$$

alors :

$$\mu_{H \cap H'}(xy) \geq \mu_{H \cap H'}(x) \wedge \mu_{H \cap H'}(y)$$

(ii) pour tout $x \in G$ on a :

$$\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x);$$

$$\mu_{H'}(x^{-1}) \geq \mu_{H'}(x);$$

donc

$$\mu_{H \cap H'}(x^{-1}) \geq \mu_{H \cap H'}(x).$$

Proposition 3.4 *l'union de deux groupe flou n'est pas nécessairement un groupe.*

Théorème 3.1 *Soit H un groupe flou de G les conditions suivant sont équivalent :*

1. $\mu_H(xy) = \mu_H(yx);$
2. $\mu_H(xy(x^{-1})) = \mu_H(y).$

Preuve :

Soit $x, y \in G$ (1) \implies (2) $\mu_H(xyx^{-1}) = \mu_H((xy)x^{-1}) = \mu_H(x^{-1}xy) = \mu_H(y).$

(2) \implies (1) on a $xy = x(yx)x^{-1};$

$$\mu_H(xy) = \mu_H(x(yx)x^{-1}) = \mu_H(yx).$$

Définition 3.2 (groupe flou normale) *Soit H est un groupe flou de G , est appelle groupe flou normale si*

$$\mu_H(xyx^{-1}) \geq \mu_H(y)$$

.

Proposition 3.5 *Si G un groupe monogène et H un groupe flou de (L, G) , si a et b sont générateurs de G , alors $\mu_H(a) = \mu_H(b)$, pour tout x de G , $\mu_H(a) \leq \mu_H(x)$.*

Preuve :

Si a et b sont des générateur de G , s'il existe m, n de \mathbb{Z} tel que $a = b^m$ et $b = a^n$, d'où, d'après iii de Propriétés 3.1 $\mu_H(a) = \mu_H(b^m) \geq \mu_H(b)$ et $\mu_H(b) = \mu_H(a^n) \geq \mu_H(a)$, d'où $\mu_H(a) = \mu_H(b)$ $\mu_H(a) \leq \mu_H(x)$ se démontre pareillement.

Définition 3.3 On appelle le caractéristique de niveau de flou d'un groupe flou si :

$$H_\alpha = \{x \in H : \mu_H \geq \alpha\}$$

Proposition 3.6 Soit (G, L) est structure flou où G est un groupe. Alors, H est un groupe flou de (G, L) si et seulement si pour tout α de L si H_α non vide, est un sous groupe flou de G .

Preuve :

Supposons que H groupe flou de (G, L) et que $H_\alpha \neq \emptyset : \forall x, y \in H_\alpha$, et on a H est un groupe flou donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$ or $\mu_H(x) \geq \alpha$ et $\mu_H(y) \geq \alpha$, donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \alpha$, soit $xy^{-1} \in H_\alpha$, par suit H_α est un groupe de G . Réciproquement, soit x, y de G ; si $\mu_H(x) = \alpha$ et $\mu_H(y) = \beta$, appartiennent $H_{\alpha \wedge \beta}$ qui est donc non vide; d'après l'hypothèse c'est un groupe de G , donc xy^{-1} lui appartient, soit $\mu_H(xy^{-1}) \geq \alpha \wedge \beta$ ou encore $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$.

3.1.3 Morphismes des groupes flous

Définition 3.4 Soit G et G' des groupes classique, et H (resp. H') un groupe flous de G (resp. G'). Un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ est appelé un morphisme flou de H vers H' si :

$$\mu_{H'} \circ f \geq \mu_H.$$

Définition 3.5 Avec les hypothèse et les notations de la Définition 3.4, on appelle image homomorphe de H par f la partie flou $f(H)$ de $(f(G), L)$ définie par : $x \in f(H)$ et $\mu_{f(H)}(x) = \sup_{y \in f^{-1}(x)} \mu_H(y)$.

Proposition 3.7 Si H est groupe flou, $f(H)$ est un groupe flou de $(f(G), L)$.

Preuve : Nous allons démontrer que $f(H) = f'(H)$; la conclusion proviendra alors de Proposition 3.2. Soit $x \in f(H)$, il existe y de H tel que $y \in f^{-1}(x)$ avec $\mu_H(y) = 1$ par soit $\sup_{y \in f^{-1}(x)} \mu_H(y) = 1$, d'où $\mu_{f(H)}(x) = 1 = \mu_{f'(H)}(x)$. Si $x \notin f(H)$, pour tout y de $f^{-1}(x)$ $\mu_H(y) = 0$, donc $\mu_{f(H)}(x) = 0 = \mu_{f'(H)}(x)$, donc $f(H) = f'(H)$.

3.2 Groupe flou (vision II)

Dans cette section on va développer la notion de groupe flou avec vision II et quelques propriétés fondamentales. Pour plus d'étude sur les définitions et les propriétés des groupes flous voir ([16])

3.2.1 Définitions et exemples

Définition 3.6 (opération binaire flou) Soit G un ensemble non vide, et R un sous-ensemble flou de $G \times G \times G$. On appelle " $*$ " un opération binaire flou de G si :

- (i) $*(a, b, c) > L, \forall a, b \in G, \exists c \in G$;
- (ii) $*(a, b, c_1) > L, *(a, b, c_2) > L$, implique $c_1 = c_2, \forall a, b, c_1, c_2 \in G$.

Définition 3.7 Soit G un ensemble non vide et $*$ un opération binaire flou de G . $(G, *)$ est un groupe flou si les conditions suivante sont verifient :

- $G1 : \forall a, b, c, z_1 \text{ et } z_2 \in G : ((a * b) * c)(z_1) > L \text{ et } (a * (b * c))(z_2) > L \text{ implique } z_1 = z_2$;
- $G2 : \exists e, a \in G \text{ tel que } : (e * a)(a) > L \text{ et } (a * e)(a) > L$;
- $G3 : a, b \in G \text{ tel que } : (a * b)(a) > L \text{ et } (b * a)(e) > L \text{ (b élément inverse de } a(a^{-1} = b))$.

Exemple 3.1 (i) $G = \{a\}$, $(G, +)$ est un groupe flou ;

(ii) $G = \mathbb{Z}_3 = \{1, 2, 3\}$, $(G, +)$ est groupe flou.

3.2.2 Propriétés des groupes flous

Propriétés 3.2 (16) Soit $(G, *)$ est un groupe flou. Alors :

- (i) L'élément neutre de G , est unique ;
- (ii) $(a * a)(a) > L$ implique $a = e$;
- (iii) $(a * b)(d) > L$ et $(a * c)(d) > L$, implique $b = c$;
- (iv) $(b * a)(d) > L$ et $(c * a)(d) > L$, implique $b = c$;
- (v) Pour tout $a \in G$, élément inverse de a est unique ;
- (vi) $(a^{-1})^{-1} = a$;
- (vii) $(b^{-1} * a^{-1})(c) > L$, et $(a * b)(d) > L$, implique $c = d$.

Preuve :

(i) e_1 et e_2 deux élément neutre de G , Alors :

$$(e_1 * e_2)(e_1) > L \text{ et } (e_1 * e_2)(e_2) > L; \text{ donc : } *(e_1, e_2, e_2) > L \text{ et } *(e_1, e_2, e_1) > L.$$

(ii) b est un élément inverse de a , Alors :

$$((b * a) * a)(a) \geq *(b, a, e) \wedge *(e, a, a) > L;$$

$$((b * (a * a))(e) \geq *(a, a, a) \wedge *(b, a, e) > L.$$

donc $a = e$ comme (G1).

(iii) Soit $h \in G$, tel que $*(a^{-1}, d, h) > L$, Alors :

$$(a^{-1} * (a * b))(h) \geq *(a, b, d) \wedge *(a^{-1}, d, h) > L;$$

$$((a^{-1} * a) * b)(b) \geq *(a^{-1}, a, e) \wedge *(e, b, b) > L.$$

si $h = b$ comme (G1), $*(a^{-1}, d, b) > L$, donc :

$$(a^{-1} * (a * c))(b) \geq *(a, c, d) \wedge *(a^{-1}, d, b) > L.$$

$$((a^{-1} * a) * c)(c) \geq *(a^{-1}, a, e) \wedge *(e, c, c) > L.$$

Alors : $b = c$ comme (G1).

(iv) comme (iii).

(v) Soit b et c élément de a . Alors $(a * b)(e) > L : (a * c)(e) > L$, donc $b = c$ comme (iii).

(vi) $(a * a^{-1})(e) > L$ et $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} > L$

donc : $(a^{-1})^{-1} = a$.

(vii) Soit $h \in G$, tel que $*(b, c, h) > L$. Alors :

$$(b * (b^{-1} * a^{-1}))(h) \geq *(b^{-1}, a^{-1}, c) \wedge *(b, c, h) > L;$$

$$(b * b^{-1}) * a^{-1})(a^{-1}) \geq *(b, (b^{-1}, e) \wedge *(e, a^{-1}, a^{-1}) > L.$$

Si $h = a^{-1}$ et $*(b, c, a^{-1}) > L$, soit $k = G$ tel que : $*(b, c, k) > L$, Alors :

$$(a * b) * c)(k) \geq *(a, b, d) \wedge *(d, c, k) > L;$$

$$(a * (b * c))(e) \geq *(b, c, a^{-1}) \wedge *(a, a^{-1}, e) > L;$$

Si, $k = e$ et $*(d, c, e) > L$, donc $c = d^{-1}$.

Proposition 3.8 *H est un sous-groupe flou de G si et seulement si :*

(i) $\forall a, b \in H, \forall c \in G, (a * b)(c) > L$, implique $c \in H$;

(ii) $a \in H$ implique $a^{-1} \in H$.

Proposition 3.9 *Soit $H_i, i \in I$ est une famille de groupe flou de G . Alors $\cap_{i \in I} H_i$ est un groupe flou de G .*

Définition 3.8 *Soit H un groupe flou de G , si $\forall a, b \in G, \forall h \in H$*

$$(a * (h * a^{-1}))(b) > L \Rightarrow b \in H;$$

Alors, H est un groupe flou normale de G .

3.2.3 Morphismes des groupes flous

Définition 3.9 (16) *Soit $(G, +)$ et $(G', *)$ deux groupe flous. Un morphisme de groupe $f : G \rightarrow G'$ est appelé morphisme flou si :*

$$+(a, b, c) > L \Rightarrow *(f(a), f(b), f(c)) > L.$$

Propriété 3.1 *Soit $(G, +)$ et $(G', *)$ deux groupe flous, et soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme flou. Alors :*

(i) $f(e - l) = e_l$;

(ii) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

3.3 Anneaux flous (vision I)

Cette section est une initiation à l'étude générale des anneaux flous, cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien W. Liu. Dans cette section on va développer la notion d'un anneau flou et quelques propriétés fondamentales. [4,10,11]

3.3.1 Définitions et exemples

Définition 3.10 (4) *Soit \mathbb{A} . un anneau, un ensemble flou A de \mathbb{A} , est appelée un anneau flou de \mathbb{A} . si :*

- (i) $A(\alpha x + \beta y) \geq \min(A(x), A(y))$, pour tout x, y dans \mathbb{A} ;
(ii) $A(xy) \geq \min(A(x), A(y))$, pour tout x, y dans \mathbb{A} .

Exemple 3.2 Soit $\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$, être un ensemble avec deux opérations binaires comme suit :

+	a	b	c	d	×	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	a	d	c	b	a	a	a	a
c	c	d	b	a	c	a	a	a	a
d	d	c	a	b	d	a	a	b	b

Alors $(\mathbb{A}, +, \times)$ Est un anneau. Nous définissons un ensemble flou $A : \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$, par $A(c) = A(d) > A(b) > A(a)$.

3.3.2 Propriétés des anneaux flous

Définition 3.11 Soit \mathbb{A} est un anneau, soit A est ensemble flou de \mathbb{A} est appelle un sous-anneau flou si :

Pour tout $x, y \in A$

1. $A(\alpha x + \beta y) \leq \max\{A(x), A(y)\}$;
2. $A(xy) \leq \max\{A(x), A(y)\}$.

Proposition 3.10 Soit A et B deux anneau flou de \mathbb{A} . Si $A \cap B$ non-null, donc est un anneau flou de \mathbb{A} .

Preuve :

Soit A et B deux anneaux flous de \mathbb{A} tel que :

(i) pour tout x, y dans \mathbb{A} :

$$A(\alpha x + \beta y) \geq \min(A(x), A(y));$$

$$B(\alpha x + \beta y) \geq \min(B(x), B(y)).$$

Donc :

$$A(\alpha x + \beta y) \cap B(\alpha x + \beta y) \geq (A(x) \wedge A(y)) \cap (B(x) \wedge B(y));$$

Alors :

$$A \cap B(\alpha x + \beta y) \geq \min(A \cap B(x), A \cap B(y)).$$

(ii) pour tout x, y dans \mathbb{A} :

$$A(xy) \geq \min(A(x), A(y));$$

$$B(xy) \geq \min(B(x), B(y)).$$

Donc :

$$A \cap B(xy) \geq (A(x) \wedge A(y)) \cap (B(x) \wedge B(y));$$

alors

$$A \cap B(xy) \geq A \cap B(x) \wedge A \cap B(y).$$

Définition 3.12 Soit \mathbb{A} un anneau, un anneau flou A de \mathbb{A} est appelée un anneau avec opérateur (M -anneau flou) si et seulement si pour tout $t \in [0, 1]$, At est un anneau avec l'opérateur de \mathbb{A} , quand $At \neq \emptyset$, où $At = \{x \in \mathbb{A} : A(x) \geq t\}$.

Définition 3.13 (11) Soit A un anneau flou, on appelé anneau d'idéale si :

$$(i) A(x + y) \geq A(x) \wedge A(y);$$

$$(ii) A(xy) \geq A(y);$$

Définition 3.14 Soit A M - l'idéal flou de \mathbb{A} , est un schéma M -flou de \mathbb{A} tel que :

$$(iii) A(y + x - y) \geq A(x);$$

$$(iv) A(xy) \geq A(z);$$

$$(v) A((x + z)y - xy) \geq A(z).$$

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{A}$ Notons que A est un M -idéale flou à gauche de \mathbb{A} s'il satisfait (i), (ii), (iii) et (iv), et A est dit M -idéale flou à droite de \mathbb{A} , s'il satisfait (i), (ii), (iii) et (v).

Théorème 3.2 Soit A est M -sous-anneau flou dans \mathbb{A} si et seulement si A^c est un M -sous-anneau flou de \mathbb{A} .

Preuve :

supposons que A est un M -sous-anneau flou de \mathbb{A} , et on montre que A^c est un M -sous-anneau flou, soit $x, y \in \mathbb{A}$ on a :

$$\begin{aligned}
A^c(\alpha x + \beta y) &= 1 - A(\alpha x + \beta y); \\
A^c(\alpha x + \beta y) &\geq 1 - \max\{A(x), A(y)\}; \\
A^c(\alpha x + \beta y) &= \min\{1 - A(x), 1 - A(y)\}; \\
A^c(\alpha x + \beta y) &= \min\{A^c(x), A^c(y)\};
\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}
A^c(xy) &= 1 - A(xy); \\
A^c(xy) &\geq 1 - \max\{A(x), A(y)\}; \\
A^c(xy) &= \min\{1 - A(x), 1 - A(y)\}; \\
A^c(xy) &= \min\{A^c(x), A^c(y)\}.
\end{aligned}$$

Donc A^c est M -sous-anneau flou de \mathbb{A} . Inversement,

$$\begin{aligned}
A(\alpha x + \beta y) &= 1 - A^c(\alpha x + \beta y); \\
A(\alpha x + \beta y) &\geq 1 - \max\{A^c(x), A^c(y)\}; \\
A(\alpha x + \beta y) &= \min\{1 - A^c(x), 1 - A^c(y)\}; \\
A(\alpha x + \beta y) &= \min\{A(x), A(y)\};
\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}
A(xy) &= 1 - A^c(xy); \\
A(xy) &\geq 1 - \max\{A^c(x), A^c(y)\}; \\
A(xy) &= \min\{1 - A^c(x), 1 - A^c(y)\}; \\
A(xy) &= \min\{A(x), A(y)\}.
\end{aligned}$$

Donc A est un M -sous-anneau flou de \mathbb{A} .

Définition 3.15 Soit \mathbb{A} est M -anneau flou, et on a la famille $\{A_i : i \in I\}$ des idéaux flous de \mathbb{A} , on plus on a intersection de $\cap_{i \in I} A_i$ est un idéal flou défini par :

$$\cap_{i \in I} A_i(x) = \inf\{A_i(x) : i \in I\}, \forall x \in \mathbb{A}.$$

3.3.3 Morphismes des anneaux flous

Définition 3.16 (4) Soit \mathbb{A} et \mathbb{B} deux M -anneau, et soit f est une fonction de \mathbb{A} sur \mathbb{B} :

- (i) Si B est un M -anneau flou dans \mathbb{B} , donc un pré-image de B par f est un M -anneau flou de \mathbb{A} est défini par :

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)), \forall x \in \mathbb{A};$$

- (ii) Si A est un anneau M -anneau flou, alors l'image de A sur f est un M -anneau flou dans \mathbb{B} est défini par :

$$f(A)(x) = \begin{cases} \sup - x \in f^{-1}(y)A(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout $y \in \mathbb{B}$.

Théorème 3.3 Soit \mathbb{A} et \mathbb{B} deux M -anneau flous et $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, est un M -homomorphisme de \mathbb{A} sur \mathbb{B} défini par :

- (i) Si B est un M -anneau flou de \mathbb{B} , alors $f^{-1}(B)$ est un M -anneau flou de \mathbb{A} .
(ii) Si A est un anneau flou de \mathbb{A} , alors $f(A)$ est un M -anneau flou de \mathbb{B} .

Preuve :

- (i) Soit $x, y \in \mathbb{A}$, alors on a :

$$f^{-1}(B)(x + y) = B(f(x) - f(y));$$

$$f^{-1}(B)(x + y) \geq \min\{B(f(x)), B(f(y))\};$$

$$f^{-1}(B)(x + y) = \min\{f^{-1}(B)(x), f^{-1}(B)(y)\};$$

Et

$$f^{-1}(B)(x.y) = B(f(x).f(y));$$

$$f^{-1}(B)(x + y) \geq \min\{B(f(x)), B(f(y))\};$$

$$f^{-1}(B)(x + y) = \min\{f^{-1}(B)(x), f^{-1}(B)(y)\};$$

Donc $f^{-1}(B)$ est un M -anneau flou de \mathbb{A} . (ii) soit $a, b \in \mathbb{B}$, alors on a :

$$\{z : z \in f^{-1}(a + b)\} \supseteq \{x - y : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a+b) = \sup\{A(z) : z \in f^{-1}(a+b)\};$$

$$f(A)(a+b) \geq \sup\{f(x+y) : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a+b) \geq \sup\{\min(A(x), A(y)) : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a+b) = \min\{(\sup A(x)) : x \in f^{-1}(a), (\sup A(y)) : y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a+b) = \min\{f(A)(a), f(A)(b)\};$$

et

$$\{z : z \in f^{-1}(a+b)\} \supseteq \{x-y : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a.b) = \sup\{A(z) : z \in f^{-1}(a.b)\};$$

$$f(A)(a.b) \geq \sup\{f(x.y) : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a.b) \geq \sup\{\min(A(x), A(y)) : x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a.b) = \min\{(\sup A(x)) : x \in f^{-1}(a), (\sup A(y)) : y \in f^{-1}(b)\};$$

$$f(A)(a.b) = \min\{f(A)(a), f(A)(b)\};$$

Donc $f(A)$ est un M -anneau flou de \mathbb{A} .

3.4 Anneaux flous (vision II)

3.4.1 Définitions et exemples

Définition 3.17 (1) Soit A un ensemble non vide muni de deux opérations binaire flou " + " et $*$, est un anneau flou si :

(i) $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe flou ;

(ii) $(\mathbb{A}, *)$ est un semi groupe flou ;

(iii) pour tout $x, y, z \in \mathbb{A}$:

$$x * (y + z) = x * y + x * z;$$

$$(y + z) * x = y * x + z * x.$$

Exemple 3.3 (i) $A = \{a\}$, $(A, +, *)$ est anneau flou ;

(ii) $A = \mathbb{Z}_3 = \{1, 2, 3\}$, $(A, +, *)$ est anneau flou.

3.4.2 Propriétés des anneaux flous

Définition 3.18 (1) Soit S un sous-anneau flou de A si :

(i) Si S un sous-ensemble flou A . Alors S est un anneau flou.

Définition 3.19 (diviseur de zéro flou) Soit A est anneau flou, $a, b \in A$, tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On appelé a, b sont diviseur de zéro flou si :

$$a * b = 0.$$

Définition 3.20 Soit $(S, +, *)$ est sous-anneau flou de $(A, +, *)$. On appelé S est un idéal de A si :

$$a * b \in S, \forall a \in A \text{ et } b \in S.$$

Proposition 3.11 Soit A et B deux anneaux flous. Si $A \cap B$ non-null, donc est un anneau flou de \mathbb{A} .

Preuve :

Soit A, B deux anneau flou est on a $A \cap B \neq 0$: (i) $A \cap B$ est est un groupe flou d'après la Proposition 3.3 ;

(ii) $A \cap B$ est est un semi-groupe flou ;

(iii) $A \cap B$ est distributive.

Alors, $A \cap B$ est un anneau flou.

Proposition 3.12 Soit A et B deux anneaux flous. $A \cup B$ n'est pas nécessairement un anneau flou .

Preuve :

$A \cup B$ n'est pas nécessairement un groupe flou d'après la Proposition [3.4]. Alors, $A \cup B$ n'est pas nécessairement un anneau flou.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les deux visions de la notion de groupe et (resp. anneau) flou, qui sont basés sur la notion d'ensemble flou et d'opération floue. Nous avons parlé des définitions, propriétés et des exemples les plus importants.

Bibliographie

- [1] R. S. Abdul et M.F. Marashdeh, Intuitionistic Fuzzy Rings, International Journal of Algebra, 5(2011), no. 1, 37 - 47.
- [2] M. Akgul, Some Properties of Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 133(1988), 93-100.
- [3] M. Z. Alam, Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings With Operators, J. Math (IOSR-JM), (2015), 48-54.
- [4] J. Calais, Éléments de la théorie des groupes, Presses Universitaires de France, 1984.
- [5] M. Ganesh, Introduction to fuzzy sets and fuzzy logic, *Prentice-hall* (2008), 1-166.
- [6] J. K. George and Y. Bo, Fuzzy set and fuzzy logic : theory and application, *Prentice-hall*, (1995), 1-278.
- [7] J. A. Gogun, L-fuzzy sets, J. Math. Appl. 18 (1967), 149-156 .
- [8] D. Guin, Algèbre tome 2 , presses Université de France, octobre 2013 .
- [9] A. Kaufman, Introduction a la théorie des sous-ensembles flous, Vols 1-IV , Masson, Paris, 1977.
- [10] W. J. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy sets and systems 8 (1982), 133-139.
- [11] Y. C. Ren, Fuzzy ideals and quotient rings, J. Fuzzy Math 4 (1985), 19 – 26.
- [12] A. Rosnenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 512-517.
- [13] web : Théorie des-groupes@orange.fr.
- [14] S. Roman, W. M. Wu, Normal fuzzy subgroups, J. Fuzzy Math. 1 (1981), 21-23.
- [15] E. Vieillard-Baron and G. Philipps and S. Rouzes, Anneau et corps, 2001.
- [16] X. Yuan, Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004), 631-641.

- [17] L. A. Zadeh., Fuzzy sets, Information and computation 8(1965), 338-353.